COSTEL-DOBRE CHITEŞ

CURS DE MATEMATICĂ

PENTRU ÎNVĂŢĂMÂNTUL PRIMAR ŞI PREŞCOLAR

EDIŢIA A II-A, REVIZUITĂ ŞI ADĂUGITĂ

PRO UNIVERSITARIA
BUCUREŞTI
2015

CURSUL NR.1

Elemente de logică şi teoria mulţimilor

Logica matematică [gr.logos-„raţiune"] este o ştiinţă care are ca obiect studiul formelor propoziţionale şi legile de raţionare cu expresii propoziţionale, precum şi modele care permit realizarea acestui studiu. Logica matematică este interesată numai de valoarea logică a propoziţiilor adică dacă sunt adevărate sau nu.

Argumentele care validează demonstraţiile convenţionale formează logica.

Notă istorică

Primul studiu sistematic al raţionamentelor logicii a fost opera filosofului grec Aristotel (384-322 î.Hr.). Deşi bazele filosofiei au fost puse de Platon (427-347 î.Hr.), Aristotel este cel care a tras cocluziile necesare din filosofia acestuia şi a dezvoltat-o.

În tratatul său de logică, Aristotel prezintă o colecţie a principalelor raţionamente deductive. Cultura aristotelică a fost preluată de arabi, prin traducerile siriene, de unde a trecut în Evul Mediu Creştin.

Matematicianul german Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) este considerat primul filosof care a intenţionat să dezvolte logica simbolistică ca limbaj ştiinţific universal. Aceste studii au dat un mare impuls creaţiei în domeniul matematicii. În secolul al XIX-lea, matematicienii englezi George Boole (1815-1864) şi Augustus De Morgan (1806-1871) au revoluţionat logica aplicând metodele algebrei simbolistice. Contribuţii ulterioare au fost date de inginerul şi filosoful american Charles Sanders Peirce (1839-1902) care a introdus şi conceptul de cuantificator în logica simbolică, Gottlieb Frege (1848-1925), Bertrand Russell (1872-1970), David Hilbert(1862-1943), Paul Bernays (1888-1977).

Conectori logici şi table de adevăr

Propoziţiile sunt notate prin litere mici: $p, q, r, \ldots$ fiind considerate ca fiind fie false fie adevărate.

Valoarea de adevăr a unei propoziţii false este 0, iar a unei propoziţii adevărate este 1.

Exemple

p: „Matematica este o disciplină ştiinţifică".

q: „$2+5=8$".

Propoziţiile precedente sunt numite primitive, deoarece nu pot fi descompuse în altele mai mici.

Putem crea alte propoziţii plecând dela cele existente în două moduri:

1) Transformând o propoziţie p în negaţia sa $\rceil p$ (se citeşte non p).

De exemplu: $\rceil p$: „Matematica nu este o disciplină ştiinţifică".

2) Combinând mai multe propoziţii prin utilizarea conectorilor logici:

a) conjuncţia, noatată $\wedge$, se citeşte „şi";

b) disjuncţia, notată $\vee$, se citeşte „sau";

c) implicaţia, notată $\rightarrow$, se citeşte „implică" . Dacă considerăm implicaţia $p \rightarrow q$, atunci p este ipoteza, iar q este concluzia. Mai spunem că p este suficient să aibe loc q;

q este necesar dacă are loc p; q este o condiţie necesară pentru p; dacă p atunci q;

d) echivalenţa, notată $\leftrightarrow$, se citeşte „echivalent". De exemplu $p \leftrightarrow q$ se citeşte: p dacă şi numai dacă q; p este necesar şi suficient pentru q.

Propoziţiile compuse sunt definite prin următoarele tabele:

p	$\rceil p$
0	1
1	0

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Reţinem că propoziţia compusă $p \wedge q$ este adevărată numai când ambele propoziţii sunt adevărate. Propoziţia compusă $p \vee q$ este falsă numai când ambele propoziţii sunt false.

Falsul implică orice.

Vom aminti un raţionament al logicianului englez Bertrand Russell (filosof, matematician, critic social şi laureat al premiului Nobel pentru literatură, în anul 1950).

Mare i-a fost mirarea unui filosof când a aflat de la logicianul B. Russell că dintr-o afirmaţie falsă poate fi dedusă oricare alta. El a întrebat:

„– Dumneavoastră consideraţi că din afirmaţia falsă $5 = 2 + 2$ rezultă afirmaţia că sunteţi Papa de la Roma?

– Desigur! a răspuns cu fermitate Russell şi a expus demonstraţia:

Dacă scădem 2 din fiecare membru, vom obţine $3 = 2$ sau prin scădere cu o unitate obţinem echivalent $2 = 1$, atunci Papa de la Roma şi cu mine suntem una şi aceeaşi persoană.“

Exerciţiu rezolvat

Să se determine valorile de adevăr ale propoziţiilor:

$$p \to (p \vee q); \;\; p \wedge (\rceil p \wedge q).$$

Soluţie. Vom completa următorul tabel:

p	q	$p \vee q$	$p \to (p \vee q)$	$\rceil p$	$\rceil p \wedge q$	$p \wedge (\rceil p \wedge q)$
0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	0
1	0	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0

Definiţie. *O propoziţie compusă se numeşte tautologie dacă este adevărată indiferent de valorile de adevăr ale propoziţiilor sale componente.*

O propoziţie compusă se numeşte contradicţie dacă este falsă indiferent de valoarile de adevăr ale propoziţiilor sale componente.

Din exemplul de mai sus, propoziţia $p \to (p \vee q)$ este o tautologie, iar propoziţia $p \wedge (\rceil p \wedge q)$ este o contradicţie.

În general, o demonstraţie este formată dintr-o listă de propoziţii date, numite *premise*, şi o propoziţie care se numeşte *concluzie*.

Să notăm premisele cu $p_1, p_2, \ldots, p_n$ şi cu q concluzia. Astfel vom avea:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \to q,$$

unde în ipoteză avem conjuncţia a n premise. Observăm că dacă cel puţin una dintre premise este falsă, atunci indiferent de valoarea de adevăr a lui q implicaţia este adevărată. Dacă toate premisele sunt adevărate şi q este adevărată, atunci implicaţia este adevărată.

Exerciţiu rezolvat

Dacă propoziţiile p, q sunt primitive astfel ca implicaţia $p \to q$ să fie falsă, să se determine valoarea de adevăr pentru:

a) $p \wedge q$; b) $\rceil p \vee q$; c) $q \to p$; d) $\rceil q \to \rceil p$.

Soluţie. Avem p adevărată şi q este falsă. Rezultă:

a) 0; b) 0; c) 1; d) 0.

Exerciţiu rezolvat

Să se determine valoarea de adevăr ale următoarelor implicaţii:

a) dacă $4+8=13$ atunci $6+9=20$;

b) dacă $7+9=16$ atunci $6+8=14$;

c) dacă $4+9=13$ atunci $5+9=18$;

d) dacă Thomas Jefferson a fost primul preşedinte al S.U.A. atunci
$$3+8=11.$$

Soluţie. c) Este falsă; a), b),d) sunt adevărate. T. Jefferson a fost al treilea preşedinte în perioada 1801-1809. Primul preşedinte a fost George Washinton (1789-1797).

Exerciţiu rezolvat

Se consideră tabelul de adevăr următor:

p	q	$p\vee q$	$p\to(p\vee q)$	$\rceil p$	$\rceil p\wedge q$	$p\wedge(\rceil p\wedge q)$
0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	0
1	0	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0

O propoziţie se numeşte *tautologie* dacă este adevărată indiferent de valorile de adevăr ale propoziţiilor sale componente. Astfel propoziţia $p\to(p\vee q)$ ale cărei valori de adevăr sunt în coloana a IV-a a tabelului este o tautologie.

O propoziţie se numeşte *contradictorie* dacă este falsă indiferent de valorile de adevăr ale propoziţiilor sale componente. Astfel propoziţia $p\wedge(\rceil p\wedge q)$ este contradictorie, aşa cum rezultă din coloana a VII-a din tabel.

Exerciţiu rezolvat

Se consideră tabelul de adevăr următor:

p	q	$\rceil p$	$\rceil p\vee q$	$p\to q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

Două propoziţii s_1, s_2 se numesc *echivalente* şi scriem $s_1 \Leftrightarrow s_2$ dacă s_1 este simultan falsă sau simultan adevărată cu s_2.

Din tabelul precedent, deducem că $p \to q \Leftrightarrow \rceil p \vee q$.

Exerciţiu rezolvat

Se consideră tabelul de adevăr următor:

p	q	$p \wedge q$	$\rceil(p \wedge q)$	$\rceil p$	$\rceil q$	$\rceil p \vee \rceil q$	$p \vee q$	$\rceil(p \vee q)$	$\rceil p \wedge \rceil q$
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0

Din acest tabel rezultă că au loc relaţiile lui De Morgan:

$$\rceil(p \wedge q) \Leftrightarrow \rceil p \vee \rceil q, \qquad \rceil(p \vee q) \Leftrightarrow \rceil p \wedge \rceil q.$$

Vom nota cu T_0 tautologia şi cu F_0 propoziţia contradictorie. Vom enumera lista proprietăţilor algebrei propoziţiilor care se demonstrează cu ajutorul tabelelor de adevăr:

1) $\rceil\rceil p \Leftrightarrow p$ (legea dublei negaţii)
2) $\rceil(p \wedge q) \Leftrightarrow \rceil p \vee \rceil q$ (legile lui De Morgan)
   $\rceil(p \vee q) \Leftrightarrow \rceil p \wedge \rceil q$
3) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ (legile comutativităţii)
   $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
4) $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ (legile asociativităţii)
   $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
5) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (legea de distributivitate a lui $\vee$ faţă de $\wedge$)
   $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (legea de distributivitate a lui $\wedge$ faţă de $\vee$)
6) $p \vee p \Leftrightarrow p$ (legile de idempotenţă)
   $p \wedge p \Leftrightarrow p$
7) $p \vee F_0 \Leftrightarrow p$ (legile elementrelor neutre)
   $p \wedge T_0 \Leftrightarrow p$
8) $p \vee \rceil p \Leftrightarrow T_0$ (legile inversării)
   $p \wedge \rceil p \Leftrightarrow F_0$
9) $p \vee T_0 \Leftrightarrow T_0$ (legile de dominare)
   $p \wedge F_0 \Leftrightarrow F_0$
10) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ (legile de absorbţie)
   $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

Observaţie. Dacă s este o propoziţie, duala sa s^d este propoziţia obţinută astfel: $\vee$ devine $\wedge$, $\wedge$ devine $\vee$, F_0 devine T_0, T_0 devine F_0, iar negaţia $\rceil$ nu se modifică.

Remarcăm echivalenţa: dacă $s \Leftrightarrow t$ atunci $s^d \Leftrightarrow t^d$. Remarcaţi acest principiu în proprietăţile de mai sus.

Exerciţiu rezolvat

Să se calculeze : $\rceil(p \to q)$

Soluţie. $\rceil(p \to q) \Leftrightarrow \rceil(\rceil p \vee q) \Leftrightarrow p \wedge \rceil q$

Exemplu. Să se nege: „Dacă plouă îmi iau umbrela."

Soluţie. „Plouă şi nu-mi iau umbrela."

Exerciţiu

Din tabelul:

p	q	$p \to q$	$\rceil q \to \rceil p$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

să se deducă echivalenţa : $(p \to q) \Leftrightarrow (\rceil q \to \rceil p)$

Aplicaţie

Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ şi $2^n + 1$ este număr prim atunci $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$

(Admitere Facultatea de Matematică, Bucureşti, 1978)

Soluţie. Pentru $n = 1$, $M = 2 + 1 = 3$ este număr prim, $n = 2^0$. Fie $n \geq 2$; Neputând demonstra $p \to q$, vom demonstra $\rceil q \to \rceil p$. Astfel $\rceil q$: dacă n nu este putere a lui doi, înseamnă că în descompunerea sa în factori primi, n are cel puţin un factor prim impar, să-l notăm cu $2t + 1$. Deci $n = (2t + 1)\,p$, atunci:

$$M = 2^n + 1 = 2^{(2t+1)p} + 1 = \left(2^p\right)^{2t+1} + 1 = \left(2^p + 1\right)\left(2^{p(2t)} - \ldots + 1\right)$$

care este compus, adică am ajuns la $\rceil p$.

Prin utilizarea principiului logicii, rezultă afirmaţia dată ca fiind adevărată.

Utilizarea cuantificatorilor

Multe din axiomele, definiţiile şi teoremele din matematică utilizează cuantificatorii: existenţial $\exists$ sau universal $\forall$.

De exemplu: $p(x)$: $x+4$ este un număr par. Este important, care este universul în care lucrăm, adică în care mulţime variază x şi pentru care valori din această mulţime considerăm propoziţia adevărată? Evident că putem considera $x \in \mathbb{Z}$ şi x este număr par.

Se pot considera propoziţii care depind de două sau mai multe variabile. De exemplu: $q(x,y)$: $x+y=8$ etc.

Exemplu

În mulţimea numerelor reale vom considera :

$p(x) : x \geq 0$
$q(x) : x^2 \geq 0$
$r(x) : x^2 - 3x - 4 = 0$
$s(x) : x^2 - 3 > 0$

Să analizăm valorile de adevăr ale următoarelor propoziţii :

1) $\exists\, x\ [p(x) \wedge r(x)]$. Este adevărată, deoarece $p(4) \wedge r(4)$ este adevărată

2) $\forall\, x\ [p(x) \rightarrow q(x)]$. Este adevărată, deoarece dacă $a < 0$, $p(a)$ este falsă, $q(a)$ este adevărată şi $p(a) \rightarrow q(a)$ este adevărată. (Falsul implică orice). Dacă $a \geq 0$, atunci $p(a)$, $q(a)$ sunt adevărate şi $p(a) \rightarrow q(a)$ este adevărată.

3) $\forall\, x\ [q(x) \rightarrow s(x)]$. Este falsă deoarece, pentru $x = 1$, $q(1)$ este adevărată, $s(1)$ este falsă şi $q(1) \rightarrow s(1)$ este falsă.

4) $\forall\, x\ [r(x) \vee s(x)]$. Este falsă deoarece, pentru $x = 1$, $r(1)$ este falsă, $s(1)$ este falsă.

5) $\forall\, x\ [r(x) \rightarrow p(x)]$. Este falsă deoarece, pentru $x = -1$, $r(-1)$ este adevărată, iar $p(-1)$ este falsă.

Are loc implicaţia: $\forall\, x,\ p(x) \Rightarrow \exists\, x\, p(x)$. Implicaţia inversă nu este totdeauna adevărată.

Definiţie. *Fie $p(x)$, $q(x)$ propoziţii adevărate pentru x într-un univers dat. Atunci:*

$\forall\, x\ [p(x) \Leftrightarrow q(x)]$ *atunci când $p(a) \leftrightarrow q(a)$ pentru a în universul dat.*
$\forall\, x\ [p(x) \Rightarrow q(x)]$ *atunci când $p(a) \rightarrow q(a)$ pentru a în universul dat.*

Exemplu

În mulţimea numerelor reale vom considera:

$p(x) : 3x - 1 = 5,$
$q(x) : x^2 = 16.$

Observăm că $[\exists\, x\ p(x) \wedge \exists x\ q(x)] \nRightarrow \exists\, x\, [p(x) \wedge q(x)]$

CUPRINS